

# Informatik II - 2. Tutorium

Manuel Holtgrewe

9. Mai 2006

# Organisatorisches - Übungsblätter

- ▶ Bitte das Deckblatt benutzen.
- ▶ Haskell-Quellcode ausgedruckt, in Zukunft *alles andere* handschriftlich (auch Beweise, für die es Praxispunkte gibt).
- ▶ Vollständige Induktion üben.
- ▶ Mengenlehre wiederholen.
- ▶ Aufpassen mit  $\Rightarrow$  und  $\Leftrightarrow$ , da  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  in prädikatenlogischen Formeln auftauchen.

# Organisatorisches - Sonstiges

- ▶ Meine Email-Adresse ist infotut@gmail.com.
- ▶ Freitag, den 12. Mai findet keine Rechnerübung statt.
- ▶ Ab nächster Woche: Rechnerübung Dienstags oder Freitags?

# Was sind Prädikate?

- ▶ **Prädikate** sind Aussagen *über* „Gegenstände“, etwa
  - ▶ Der Angestellte mit der Personalnummer **nr** hat den Namen **name**, arbeitet in der Abteilung **abteilung** und verdient monatlich **gehalt** Euro.
  - ▶ Die Zahl **y** liegt zwischen **x** und **z**,  $\mathcal{U}_A = \mathbb{N}$
- ▶ Wir können Prädikate als Mengen von Tupeln schreiben:
  - ▶  $\{(12345, \text{Max Mustermann}, \text{Einkauf}, 2500), (3245, \dots), \dots\}$
  - ▶  $P^A(x, y, z) = \{(1, 2, 3), (1, 200, 3000), \dots\}$
- ▶ Solche Mengen von Tupeln können auch als **Relationen** aufgefasst werden.
- ▶ Meist betrachtet man zweistellige Relationen.
- ▶ Beispiele:  $\leq$ ,  $=$  oder auch *x ist mit y befreundet*.
- ▶ Relationen können Eigenschaften haben: *symmetrisch, transitiv, reflexiv, antisymmetrisch* usw.

# Sonderfälle

- ▶ Es sind noch die Prädikatensymbole *Wahr* und *Falsch* definiert.
- ▶ Dabei ist in der Definition der Semantik definiert, dass  $\mathcal{A}(\text{Wahr}) = 1$  und  $\mathcal{A}(\text{Falsch}) = 0$  gilt.

# Die Interpretationsfunktion\*

- ▶ Die Interpretationsfunktion  $\mathcal{I}_A$  ordnet jedem Variablen**symbol**, Funktions**symbol** und Prädikaten**symbol** eine Variable, Funktion bzw. ein Prädikat über dem Universum zu:
- ▶ Sei  $S$  die Menge aller Symbole,  $M = \{f_i^{j_k}, P_i^{j_k}, x_i | i \in \mathbb{N}\}$
- ▶ Sei  $M$  die Menge aller Prädikate, Funktionen und Variablen über dem Universum.
- ▶ Dann ist  $\mathcal{I}_A : S' \rightarrow M'$  mit  $S' \subset S$  und  $M' \subset M$

# Wiederholung: Syntax

- ▶  $x_1, x_2, x_3, \dots$  sind **Variablensymbole** (Konvention:  $u, v, w, x, y, z$ )
- ▶  $f_1^{k_1}, f_2^{k_2}, f_3^{k_3}, \dots$  sind **Funktionssymbole**, wobei  $k_i$  die Stelligkeit angibt (Konvention:  $f, g, h$ )
- ▶ Alle Variablensymbole sind **Terme**. Sind  $t_1, \dots, t_k$  Terme, und  $f_i^k$  ein Funktionssymbol dann ist auch  $f_i^k(t_1, \dots, t_k)$  ein Term.
- ▶  $P_1^{k_1}, P_2^{k_2}, P_3^{k_3}, \dots$  sind **Prädikatensymbole**, wobei  $k_i$  die Stelligkeit angibt (Konvention:  $P, Q, R$ )
- ▶ Ist  $P$  ein Prädikatensymbol,  $t_1, \dots, t_k$  Terme, dann ist  $P(t_1, \dots, t_k)$  ein **Atom**. Atome sind **Formeln**
- ▶ Konvention für Formeln:  $F, G, H$ .
- ▶ Sind  $F$  und  $G$  Formeln, dann auch:  $\forall xF, \exists xF, (F \vee G), (F \wedge G)$  und  $\neg F$ .
- ▶ Achtung: Die Klammerung ist wichtig!

# Wiederholung: Semantik

- ▶ Eine Struktur ist ein Paar  $\mathcal{A} = (\mathcal{I}_{\mathcal{A}}, \mathcal{U}_{\mathcal{A}})$ , wobei  $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  das **Universum** ist und  $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$  die **Interpretationsfunktion**.
- ▶ Beispiele für Universen:  $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{0, 1\}$
- ▶  $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$  ordnet den Symbolen einer Formel Funktionen, Prädikate und Variablen über dem Universum zu.
- ▶ Schönig benutzt den Existenzabschluss, wir benutzen den Allabschluss.

# Freie Variablen

- ▶ Variablen können von Quantoren **gebunden** werden, etwa:  
 $\forall xP(x), \exists xP(x)$
- ▶ Variablen, die nicht von Quantoren gebunden werden heißen **frei**.

# Allabschluss\*

- ▶ Was passiert bei der Interpretation von  $(P(x) \vee Q(x))$
- ▶ mit  $P^A(x) = \text{„}x \text{ gerade“}$ ,  $Q^A(x) = \text{„}x \text{ ungerade“}$ ?

# Kongruenz

- ▶ Definition: Zwei Formeln  $F$  und  $G$  heißen **kongruent**  $F \equiv G$ , genau dann wenn für jede auf  $F$  und  $G$  passende Struktur gilt:  $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ .
- ▶ Kongruenzumformungen (siehe Skript und Vorlesung)
- ▶ Gewisse Substitutionen führen auf kongruente Formeln

# Symbolwirrwarr

Aufpassen bei

- ▶  $\Rightarrow$  und  $\rightarrow$
- ▶  $\Leftrightarrow$  und  $\leftrightarrow$
- ▶  $\equiv$  und  $=$
- ▶  $\forall, \exists$

# Umbenennungen

- ▶ Eine **Substitution**  $[s/t]$  auf eine Formel  $F$  angewandt ersetzt jedes Vorkommen des Terms  $s$  in  $F$  durch einen Term  $t$
- ▶ Eine Substitution  $[x/y]$ , die das Variablensymbol  $x$  in der Formel  $F$  durch das Variablensymbol  $y$  ersetzt heißt **gebundene Umbenennung**, falls  $x$  in  $F$  nur einmal durch einen Quantor gebunden wird und nicht frei in  $F$  vorkommt.
- ▶ Beispiel:  $F = \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$ ,  $s = [x/z]$ ,  $s$  ist für  $F$  eine gebundene Umbenennung.
- ▶ Eine Substitution  $[x/y]$ , die das Variablensymbol  $x$  in der Formel  $F$  durch die Variable  $y$  ersetzt heißt **freie Umbenennung**, falls  $x$  in  $F$  nur frei vorkommt.
- ▶ Beispiel:  $F = \forall y (P(x) \vee Q(y))$ ,  $s = [x/z]$ .  $s$  ist für  $F$  eine freie Umbenennung.

Ende